Exercice n° 1

- $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i\sqrt{3}).(-i+\sqrt{3})}{(i+\sqrt{3}).(-i+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{-i+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3i}{1^2+\sqrt{3}^2}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}+2i}{4}$

D'où :

$$\boxed{\frac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

- $(-1-i)^2.(1-i\sqrt{3}) = 2i\,(1-i\sqrt{3})$

$= 2i + 2\sqrt{3}$

- $\dfrac{1}{i} + i = -i + i = 0$

- $(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^3 = (-\dfrac{1}{2})^3 + 3(-\dfrac{1}{2})^2(i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$+ 3(-\dfrac{1}{2})(i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 + (i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^3$

$= -\dfrac{1}{8} + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}i + \dfrac{9}{8} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

Donc : $\boxed{(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^3 = 1}$

Exercice n° 2

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

● 1) ▪ $j^2 = (\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})^2$

$= \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

↓ Formule de Moivre

Par suite on a : $j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$

▪ $j^3 = (\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})^3$

$= \cos\dfrac{6\pi}{3} + i\sin\dfrac{6\pi}{3} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$

$= 1$

↓ Formule de Moivre

Par suite on a : $j^3 = 1$

▪ $j^4 = j^3 x\, j = 1x\, j = j$

2) Si $n = 3p$ alors $j^n = (j^3)^p = 1$, $p \in IN$

Si $n = 3p + 1$ alors $j^n = j^{3p} x j = j$, $p \in IN$

Si $n = 3p + 2$ alors $j^n = j^{3p} x j^2 = j^2 = \overline{j}$, $p \in IN$

● On a : $j^3 = 1$ donc $j^2 x\, j = 1$ et par suite $j^2 = \dfrac{1}{j}$

Or d'après la question 1) on a $j^2 = \overline{j}$

il en résulte : $j^2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$

● $1 + j + j^2 = 1 + (j + \overline{j}) = 1 + 2Re(j)$

$= 1 + 2x(-\dfrac{1}{2}) = 1 - 1 = 0$

● $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

On sait que : $1 + j + j^2 = 0$ donc $j^2 = -1 - j$ d'où

$a + bj + cj^2 = a + bj + c(-1-j) = a + bj - c - jc$

$= a - c + (b-c)j$

Donc $a + bj + cj^2 = 0 \Leftrightarrow a - c + (b-c)j = 0$

$\Leftrightarrow a - c = (c-b)j$

Exercice n° 3

$z = (m-i).[(10-m) + (2+m)i]$, $m \in IR$

● On a : $z \in IR \Leftrightarrow Im(z) = 0$

$z = m.(10-m) + m(2+m)i - i.(10-m) + 2 + m$

$= m.(10-m) + 2 + m + i.[m(2+m) - .(10-m)]$

Donc $Im(z) = 0 \Leftrightarrow m(2+m) - .(10-m) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0$

Résolution de l'équation : $m^2 + 3m - 10 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4x(-10) = 49$ et $\sqrt{\Delta} = 7$

y a deux valeurs du réel m tel que z est réel

ui sont : $m_1 = \dfrac{-3+7}{2} = 2$ et $m_2 = \dfrac{-3-7}{2} = -5$

● pour $m = 2$ on a $z = 20$

Pour $m = -5$ on a $z = -78$

Exercice n° 4

$z_1 = 4 + 4i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

● $|z_1| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Soit θ un argument de z_1, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \text{ d'où } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Donc : $\boxed{|z_1| = 4\sqrt{2} \text{ et Arg } z_1 = \frac{\pi}{4}}$

De même on a :

$$|z_2| = \sqrt{^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

Soit θ un argument de z_2, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \text{ d'où } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Donc : $\boxed{|z_2| = 2 \text{ et Arg } z_2 = -\frac{\pi}{3}}$

● • $(z_1)^2 = [4\sqrt{2}\ ,\ \frac{\pi}{4}]^2 = [(4\sqrt{2})^2, 2x\frac{\pi}{4}]$

$= [32, \frac{\pi}{2}]$

• $|z_1 x\, z_2| = |z_1| \times |z_2| = 4\sqrt{2} \times 2 = 8\sqrt{2}$

$\text{Arg}(z_1 x\, z_2) \equiv \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

• $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$\text{Arg}(\frac{z_1}{z_2}) \equiv \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

• $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$ et $\text{Arg}(\frac{1}{Z}) \equiv -\text{Arg}(Z)\ [2\pi]$

Donc comme $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{\frac{z_1}{z_2}}$ il résulte que :

$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\text{Arg}(\frac{z_2}{z_1}) \equiv -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

Exercice n° 5

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $Z = \cos^2\varphi + i\sin\varphi.\cos\varphi$

● $Z=0 \Leftrightarrow \text{Re}Z = 0$ et $\text{Im}Z = 0$

Donc Z est nul si et seulement si : $\cos^2\varphi = 0$

et $\sin\varphi.\cos\varphi = 0$ d'où $Z=0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Or comme $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on aura : $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$

2) $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$

• Ecriture algébrique de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos^2\varphi + i\sin\varphi.\cos\varphi} = \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^2\varphi.\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^2\varphi.\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= 1 - i\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi}$$

Donc : $\boxed{\frac{1}{Z} = 1 - i\,\text{tg}\varphi}$

• Ecriture trigonométrique de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = 1 - i\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} - i\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Comme $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\cos\varphi > 0$

D'où $\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]}$

- Ecriture exponentielle de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}e^{-i\varphi},\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[}$$

Exercice n° 6

$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z_1 = e^{i\theta} - i$ et $z_2 = e^{-i\theta} + i$

●

- $z_1 = e^{i\theta} - i = e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_1 = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} - e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}\right]$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[-i\,2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} \times 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})$$

Donc : $\boxed{z_1 = 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}$

- On a : $z_2 = e^{-i\theta} + i = \overline{e^{i\theta} - i} = \overline{z_1}$

Donc : $\boxed{z_2 = 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}$

Par suite on aura :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}} =$$

$$e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$$

Finalement on a $\boxed{\frac{z_2}{z_1} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}}$

● $\text{aff}(\overrightarrow{OM_1}) = z_1 = e^{i\theta} - i$

$\text{aff}(\overrightarrow{M_2M}) = z - z_2 = 2\cos\theta - (e^{-i\theta} + i)$

$= 2\cos\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) - i$

$= \cos\theta + i\sin\theta - i = e^{i\theta} - i = z_1$

Donc $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_2M}$ ce qui donne :
OM_1MM_2 est un parallélogramme (1)

Et comme $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \left|e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}\right| = 1$ alors on a

$|z_1| = |z_2| \Rightarrow OM_1 = OM_2$ (2)

Conclusion : d'après les résultats (1) et (2) le quadrilatère OM_1MM_2 est un losange

- OM_1MM_2 est un losange pour qu'il soit un carré
Il suffit que : (OM_1) et (OM_2) soient perpendiculaires

Donc on doit avoir : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_2})}{aff(\overrightarrow{OM_1})}$ imaginaire pur

Or $\frac{z_2}{z_1} = = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ est un imaginaire pur

Si et seulement si : $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $\theta = -k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et on a $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Pour $k = 0$ on aura $\boxed{\theta = 0}$

Exercice n° 7

M d'affixe z

● posons $z = x + iy$ on a $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z-1| = |x-1+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

Donc

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Conclusion : l'ensemble des points M tels que $|z| = |z-1|$ est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$

2eme méthode

Soit I le point d'affixe $z_I = 1$ on a :

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow |z-0| = |z-z_I|$

$\Leftrightarrow$ OM = IM : donc M décrit la médiatrice du segment [OI]

● $|z| = |z-1| \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + iy, y \in \mathbb{R}$

Or on a: $Arg(z)+Arg(z-1) \equiv Arg[z.(z-1)]\ [2\pi]$

Et puisque : $z.(z-1) = (\frac{1}{2}+iy).(\frac{1}{2}+iy-1)$

$= (\frac{1}{2}+iy).(-\frac{1}{2}+iy)$

$= -\frac{1}{4} - y^2 < 0$

C'est adire : z . (z – 1) est un réel strictement négatif donc son Arg est π

Ce qui prouve que : $Arg(z)+Arg(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Conclusion :

$|z| = |z-1 \Leftrightarrow Arg(z) + Arg(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Exercice n° 8

● $|1+i| = \sqrt{2}$ et $Arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

• $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $Arg(1+i\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc $Z = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right]$

$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]$

$$\boxed{Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]}$$

● $Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2}$

$= \frac{1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\boxed{Z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$

● $Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

Comme deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire on aura :

$$\cos(-\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

Par suite $tg\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} =$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\boxed{tg\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice n° 9

• $m = \frac{b+c}{2}$

● Soient: $z_{B'} = b'$ et $z_{C'} = c'$ les affixes respectivement des points B' et C'

On a : BAB' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AB' = AB \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ |z_B - z_A| = |z_{B'} - z_A| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \left|\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{b-a}{b'-a} = i$

$\Leftrightarrow b - a = i(b' - a) \Leftrightarrow b - a + ia = ib'$

En multipliant la dernière égalité par $(-i)$ on aura :

$$\boxed{b' = -ib + a(1+i)}$$

De même le triangle ACC' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ AC' = AC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \left|\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{c'-a}{c-a} = i$

$\Leftrightarrow c' - a = i(c - a) \Leftrightarrow c' = ic - ia + a$

Donc : $\boxed{c' = ic + a(1 - i)}$

●

a) $B'C' = |c' - b'| = |(ic + a - ia) - (-ib + a + ia)|$

$= |i(c + b) - 2ia|$

$= |i| \cdot |c + b - 2a|$

Comme $|i| = 1$ on aura $B'C' = |c + b - 2a|$

Aussi on a: $2AM = 2|m - a| = 2\left|\frac{b+c}{2} - a\right|$

$= |2x\left(\frac{b+c}{2} - a\right)|$

$= |b + c - 2a| = B'C'$

Conclusion :

$$\boxed{B'C' = 2AM}$$

b) On a : $\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2ia - i(b+c)}{\frac{b+c}{2} - a}$

$$= \frac{i(2a - b - c)}{\frac{b + c - 2a}{2}}$$

$$\frac{b'-c'}{m-a} = = \frac{2i(2a-b-c)}{b+c-2a} = \frac{-2i(b+c-2a)}{b+c-2a}$$

$$= -2i$$

donc $\frac{aff(\overrightarrow{B'C'})}{aff(\overrightarrow{AM})}$ est un imaginaire pur par suite les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires

Exercice n° 10 (à rectifier A(1))

$Z_A = 1$, $Z_B = -i$, $Z_M = z$ et $Z_{M'} = z' = \frac{1-z}{1-iz}$

● a) $z' = \frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-z}{i(-i-z)} = -i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)$

z' est réel $\Leftrightarrow Z' = 0$ ou $\text{Arg}z' = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left[-i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right] = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(-i) + Arg\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right) = k\pi$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

D'où M décrit le cercle de diamètre [AB] privé de B .

b) $|z'| = \left|\frac{1-z}{1-iz}\right| = \left|(-i)\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right|$

$= |-i| \cdot \left|\frac{z-1}{z-(-i)}\right| = \left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right|$ car $|-i| = 1$

donc $|z'| = \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{AM}{BM}$

Par suite $|z'| = 1$ si et seulement si AM = BM

Dans ce cas M décrit la médiatrice du segment [AB]

2eme méthode

Soit I le point d'affixe $z_I = 1$ on a :

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow |z-0| = |z-z_I|$

$\Leftrightarrow$ OM = IM : donc M décrit la médiatrice du segment [OI]

● $|z| = |z-1| \iff z = \frac{1}{2} + iy, y \in IR$

Or on a: $Arg(z)+Arg(z-1) \equiv Arg[z.(z-1)]\ [2\pi]$

Et puisque : $z.(z-1) = (\frac{1}{2}+iy).(\frac{1}{2}+iy-1)$

$= (\frac{1}{2}+iy).(-\frac{1}{2}+iy)$

$= -\frac{1}{4} - y^2 < 0$

C'est adire : z . (z – 1) est un réel strictement négatif donc son Arg est π

Ce qui prouve que : $Arg(z)+Arg(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Conclusion :

$$|z| = |z-1 \Leftrightarrow Arg(z) + Arg(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$$

Exercice n° 8

● $|1+i| = \sqrt{2}$ et $Arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

• $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $Arg(1+i\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Donc $Z = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right]$

$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]$

$$\boxed{Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]}$$

● $Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2}$

$= \frac{1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\boxed{Z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$

● $Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

Comme deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire on aura :

$$\cos(-\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

Par suite $tg\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} =$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\boxed{tg\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice n° 9

• $m = \frac{b+c}{2}$

● Soient: $z_{B'} = b'$ et $z_{C'} = c'$ les affixes respectivement des points B' et C'

On a : BAB' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ AB' = AB \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ |z_B - z_A| = |z_{B'} - z_A| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \left|\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{b-a}{b'-a} = i$

$\Leftrightarrow b - a = i(b' - a) \Leftrightarrow b - a + ia = ib'$

En multipliant la dernière égalité par $(-i)$ on aura :

$$\boxed{b' = -ib + a(1+i)}$$

De même le triangle ACC' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ AC' = AC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \left|\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{c'-a}{c-a} = i$

$\Leftrightarrow c' - a = i(c - a) \Leftrightarrow c' = ic - ia + a$

Donc : $\boxed{c' = ic + a(1 - i)}$

●

a) $B'C' = |c' - b'| = |(ic + a - ia) - (-ib + a + ia)|$

$= |i(c + b) - 2ia|$

$= |i| \cdot |c + b - 2a|$

Comme $|i| = 1$ on aura $B'C' = |c + b - 2a|$

Aussi on a: $2AM = 2|m - a| = 2\left|\frac{b+c}{2} - a\right|$

$= |2x\left(\frac{b+c}{2} - a\right)|$

$= |b + c - 2a| = B'C'$

Conclusion :

$$\boxed{B'C' = 2AM}$$

b) On a : $\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2ia - i(b+c)}{\frac{b+c}{2} - a}$

$= \frac{i(2a - b - c)}{\frac{b + c - 2a}{2}}$

$\frac{b'-c'}{m-a} = = \frac{2i(2a-b-c)}{b+c-2a} = \frac{-2i(b+c-2a)}{b+c-2a}$

$= -2i$

donc $\frac{aff(\overrightarrow{B'C'})}{aff(\overrightarrow{AM})}$ est un imaginaire pur par suite les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires

Exercice n° 10 (à rectifier A(1))

$Z_A = 1$, $Z_B = -i$, $Z_M = z$ et $Z_{M'} = z' = \frac{1-z}{1-iz}$

● a) $z' = \frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-z}{i(-i-z)} = -i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)$

z' est réel $\Leftrightarrow Z' = 0$ ou $\text{Arg}z' = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left[-i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right] = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(-i) + Arg\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right) = k\pi$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

D'où M décrit le cercle de diamètre [AB] privé de B .

b) $|z'| = \left|\frac{1-z}{1-iz}\right| = \left|(-i)\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right|$

$= |-i| \cdot \left|\frac{z-1}{z-(-i)}\right| = \left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right|$ car $|-i| = 1$

donc $|z'| = \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{AM}{BM}$

Par suite $|z'| = 1$ si et seulement si $AM = BM$

Dans ce cas M décrit la médiatrice du segment [AB]

a) $z \neq -i$, on a :

$$z'+i = \frac{1-z}{1-iz}+i = \frac{1-z+i(1-iz)}{1-iz} = \frac{1-z+i+z}{1-iz}$$

$$= \frac{1+i}{(-i)(z+i)} = \frac{-1+i}{z+i}$$

D'où $z'+i = \frac{-1+i}{z+i}$

b) On a pour $z \neq -i$: $z'+i = \frac{-1+i}{z+i}$

Donc $(z'+i)(z+i) = -1+i$

$\Leftrightarrow |(z'+i)(z+i)| = |-1+i|$

$\Leftrightarrow |(z'+i)|.|(z+i)| = |-1+i|$

$\Leftrightarrow |(z'-(-i)|.|z-(-i)| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(z'-z_B|.|z-z_B| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow BM' \times BM = \sqrt{2}$

c) M décrit le cercle de centre B et de rayon 1

Signifie que : BM = 1 et comme $BM' \times BM = \sqrt{2}$

Alors on aura $BM' = \sqrt{2}$ d'où le point M' décrit le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$

Exercice n° 11

• On sait que : $\cos 3x = \text{Rel}(e^{i3x})$

Or on a : $e^{i3x} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3$

$e^{i3x} = \cos^3 x + 3i \cos^2 x.\sin x - 3\cos x.\sin x - i \sin^3 x$

$= \cos^3 x - 3\cos x.\sin x + i(3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x)$

Donc : $\boxed{\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x.\sin x}$

• On sait que : $\sin 5x = \text{Im}(e^{i5x})$

Or on a : $e^{i5x} = (e^{ix})^5 = (\cos x + i \sin x)^5$

$e^{i5x} = \cos^5 x + 5i \cos^4 x.\sin x - 10\cos^3 x.\sin^2 x - 10i \cos^2 x.\sin^3 x + 5\cos x.\sin^4 x + i \sin^5 x$

Donc :

$$\boxed{\sin 5x = 5\cos^4 x.\sin x - 10\cos^2 x.\sin^3 x + \sin^5 x}$$

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{e^{i3x}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{e^{i3x}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4}.\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

Par suite :

$$\boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x}$$

• $\cos^2 x.\sin x = (1-\sin^2 x).\sin x = \sin x - \sin^3 x$

or on a :

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$$

$$= \frac{e^{i3x}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-8i}$$

$$= -\frac{1}{4}.\frac{e^{i3x}-e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4}.\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

D'où : $\cos^2 x.\sin x = \sin x - (-\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x)$

$$\boxed{\cos^2 x.\sin x = \frac{1}{4}(\sin x + \sin 3x)}$$

• $\sin^2 x.\cos^3 x = (1-\cos^2 x).\cos^3 x = \cos^3 x - \cos^5 x$

on a déjà : $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

Linéarisons : $\cos^5 x$

$$\cos^5 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{e^{i5x}+5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}+10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}+e^{-i5x}}{32}$$

$$= \frac{1}{16}.\frac{e^{i5x}+e^{-5ix}}{2} + \frac{5}{16}.\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{10}{16}.\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x$$

$\sin^2 x.\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x - (\frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x)$

$= -\frac{1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$

$\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$

$Z = \frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}$ est définit si $e^{i\alpha} - e^{i\beta} \neq 0$ c'est à dire

$e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}$ donc pour $\alpha \neq \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

On a : $\frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{e^{i\alpha}-e^{i\beta}} = \frac{e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})}(e^{i(\frac{\alpha-\beta}{2})}+e^{-i(\frac{\alpha-\beta}{2})})}{e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})}(e^{i(\frac{\alpha-\beta}{2})}-e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})})}$

$$= \frac{e^{-i(\frac{\beta-\alpha}{2})} + e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})}}{e^{-i(\frac{\beta-\alpha}{2})} - e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})}} = \frac{2\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{-2i\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

Conclusion : $Z = i\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$; $\frac{\beta-\alpha}{2} \neq k\pi$

- si on a : $\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2}) > 0$ alors :

$\text{Arg}(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|Z| = \cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$

- si on a : $\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2}) < 0$ alors :

$\text{Arg}(Z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|Z| = -\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$

Exercice n° 12

$z_a = 1$, $z_B = -2i$ et $z' = \frac{\overline{z} + 4i}{z - 2i}$

● $z' - 1 = \frac{\overline{z} + 4i}{z - 2i} - 1$

$= \frac{\overline{z} + 4i - \overline{z} + 2i}{\overline{z} - 2i} = \frac{6i}{\overline{z} - 2i}$

● on a : $z' - 1 = \frac{6i}{\overline{z} - 2i}$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(z' - 1) \equiv \text{Arg}(\frac{6i}{\overline{z} - 2i})\ [2\pi]$

Comme $\text{Arg}(\frac{a}{b}) \equiv \text{Arg}\, a - \text{Arg}\, b\ [2\pi]$

alors

$\text{Arg}(z' - 1) \equiv \text{Arg}\,(6i) - \text{Arg}(\overline{z} - 2i)\ [2\pi]$

On sait que : $\overline{z + 2i} = \overline{z} - 2i$ donc on a

$\text{Arg}(z' - z_A) \equiv \frac{\pi}{2} - \text{Arg}(\overline{z + 2i})\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(z' - z_A) \equiv \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(z + 2i)\ [2\pi]$

Car $\text{Arg}\,\overline{a} \equiv -\text{Arg}(a)\ [2\pi]$

Il en résulte que :

$\text{Arg}(z' - z_A) - \text{Arg}(z - z_B) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(\frac{z' - z_A}{z - z_B}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

● a) $M \in \zeta(B, 3) \Leftrightarrow BM = 3$

$\Leftrightarrow |z - z_B| = 3 \Leftrightarrow |z + 2i| = 3$

$\Leftrightarrow |\overline{z + 2i}| = 3$ (car $|\overline{a}| = |a|$)

$\Leftrightarrow |\overline{z} - 2i| = 3$

Or on a : $|z' - 1| = |\frac{6i}{\overline{z} - 2i}| = \frac{|6i|}{|\overline{z} - 2i|}$

Donc $|z' - 1| = \frac{6}{3} = 2$

Donc : $|z' - z_A| = 2$ par suite : $AM' = 2$

Conclusion : **L'ensemble des points M' est le cercle ζ' de centre A et de rayon 2**

b) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\in (AB) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AB}) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Par suite : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : **M' décrit la droite qui passe par A et perpendiculaire à La droite (AB)**

Exercice n° 13

$z_a = 1$ et $z' = 2z - z^2$

● on a pour $z \neq 0$:

$\text{Arg}(z') - 2\,\text{Arg}(z) \equiv \text{Arg}(z') - \text{Arg}(z^2)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(\frac{z'}{z^2})\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(\frac{2z - z^2}{z^2})\ [2\pi]$

$\text{Arg}(z') - 2\,\text{Arg}(z) \equiv \text{Arg}(\frac{-z(z-2)}{z^2})\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(\frac{z-2}{z}) + \pi\ [2\pi]$

Donc on aura :

$\text{Arg}(z') - 2\,\text{Arg}(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow$

$\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z}\right) + \pi \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

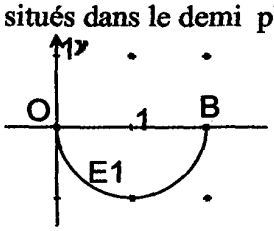
$\Leftrightarrow$

$\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, posons B le point d'affixe 2

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z-z_B}{z-z_O}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BM}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Finalement l'ensemble E_1 des points M est le demi-cercle de diamètre[OB] privé de O et B situés dans le demi plan $y \leq 0$



● a) O,M_1 et M_2 sont alignéssi et seulement si : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_1})}{aff(\overrightarrow{OM_2})}$ est réel

- si $z = 0$ alors $M_1 = M_2 = O$
- Si $z \neq o$ on aura: $\frac{z^2}{2z}$ est réel donc $\frac{z}{2}$ est réel

C'est-à-dire z est un réel par suite **l'ensemble E_2 des points M tels que O , M_1 et M_2 sont alignés est la droite des abscisses**

b) pour tout z non réel on a :

$aff(\overrightarrow{OM_1}) = z_1 = z^2$

$aff(\overrightarrow{M'M_2}) = z_2 - z' = 2z - (2z - z^2) = z^2$

D'où : $aff(\overrightarrow{OM_1}) = aff(\overrightarrow{M'M_2})$ donc $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M'M_2}$

Par suite OM_1M_2M' est un parallélogramme

Exercice n° 14

*Pour z = 1 le résultat est trivial

*Pour $z \neq 1$ Les points d'affixes respectives 1, z et z^2 *sont alignés signifie* $\frac{z^2-1}{z-1}$ est réel

$\Leftrightarrow \frac{(z-1)(z+1)}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z-1$ réel$\Leftrightarrow z$ réel

Conclusion : **l'ensemble des points M(z) du plan complexe tels que les points d'affixes respectives 1, z et z^2 sont alignés est la droite des abscisses.**

Exercice n° 15

Soient r et θ le module et l'argument de $1 - i\sqrt{3}$

On a :

$r = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{3}$

D'où :

● $(-i\sqrt{3})^n = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^n$

$= 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

On a donc : $(1 - i\sqrt{3})^n$ est un réel positif si et seulement si : $\cos\frac{n\pi}{3} \geq 0$ et $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$ d'où n est un multiple de 6

Exercice n° 16 rectifier

$Z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

● a) $Z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ donc $Z^5 = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^5 = e^{2i\pi} = 1$

Par suite $Z^5 - 1 = 0$

b) on a : $Z^5 - 1 = (Z-1).(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1)$

$Z \neq 1$ et $Z^5 - 1 = 0$ équaut à: $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

● a)On sait:$(\cos\theta+ i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$
D'où

$$Z^4 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

$$Z^3 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$Z^2 = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$

b) d'après 2) a) on a : $Z^4 + Z = e^{i\frac{8\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}}$

$$= e^{i\frac{10\pi}{10}}(e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{-i\frac{3\pi}{5}})$$

$$Z^4 + Z = e^{i\pi}(2\cos\frac{3\pi}{5}) = (-1).2\cos(\pi - \frac{2\pi}{5})$$

$$= (-1).2[-\cos(\frac{2\pi}{5})] = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$$

Donc : $\boxed{Z^4 + Z = 2\cos(\frac{2\pi}{5})}$

De même on a :

$$Z^2 + Z^3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}}$$

$$= e^{i\frac{5\pi}{5}}(e^{-i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{5}})$$

$$= e^{i\pi}(2\cos\frac{\pi}{5}) = -2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$= 2\cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

Donc : $\boxed{Z^2 + Z^3 = 2\cos(\frac{4\pi}{5})}$

● a) On sait que : $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$

Donc : $1 + (Z + Z^4) + (Z^2 + Z^3) = 0$

Par suite en remplacent $(Z + Z^4)$ et $(Z^2 + Z^3)$ par les valeurs trouvées dans 2) b) on trouve :

$$1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0 \quad (I)$$

b) on sait que : $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

d'où $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos 2.\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$

Donc remplacent $\cos\frac{4\pi}{5}$ par $2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$ dans l'égalité (I) :

$$1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0 \quad (II)$$

Posons par suite $X = \cos(\frac{2\pi}{5})$ dans (II) on aura :

$$4X^2 + 2X - 1 = 0 \text{ et } X = \cos(\frac{2\pi}{5})$$

Donc $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est solution de: $4X^2 + 2X - 1 = 0$

c) Déterminant dans IR les solutions de l'équation

$4X^2 + 2X - 1 = 0$, en effet :

$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - (-4) = 5 > 0$ donc il y en a deux racines : $X' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $X'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$

On a $X' > 0$ et $X'' < 0$

Conclusion : $\boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Exercice n° 17

$z_A = i$, $z_B = \frac{1+i}{2}$ et $z' = (1-i)z - 1$

● a) $|z'| = |(1-i)z - 1| = |(1-i)(z - \frac{1}{1-i})|$

$$= |1-i| \,.\, |z - \frac{1}{1-i}|$$

Avec : $|1-i| = \sqrt{2}$

Et $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = z_B$

Donc : $|z'| = \sqrt{2}\,.\,|z - z_B|$

Comme $|z'| = 2\sqrt{2}$ on aura $|z - z_B| = 2$ c'est-à-dire BM = 2

Il en résulte que M décrit le cercle ζ de centre B et de rayon 2

b) $\theta \in [0, \pi]$

pour $z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$,on a :

$z' = (1-i)z - 1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{i\theta} - 1$ et $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $z' = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} e^{i\theta} - 1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}\, e^{i\theta} - 1$

$$= e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} - 1$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}\left(e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})} - e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}\right)$$

$$= 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})}$$

$$z' = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8})} \quad (i = e^{i\frac{\pi}{2}})$$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})}$$

$$z' = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})}$$

- Si : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ alors $-\frac{\pi}{8} \le \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8} \le 0$

Donc: $\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right) \le 0$ dans ce cas :

$$z' = -2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8}-\pi)} \quad \text{car } e^{-i\pi} = -1$$

D'où $z' = -2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{8})}$

- Si : $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \pi$ alors $0 \le \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8} \le \frac{3\pi}{8}$

Donc: $\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right) \ge 0$ dans ce cas :

$$z' = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})}$$

Conclusion :

Si : $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \pi$ alors

$$\boxed{z' = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).\left(\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8}) + i\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})\right)}$$

Si : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ alors

$$\boxed{z' = -2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{8}) + i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{8})\right)}$$

● a) $M \neq B$

$$\text{Arg}(z') \equiv \text{Arg}[(1-i)z - 1] \quad [2\pi]$$

$$\equiv \text{Arg}[(1-i).(z - \frac{1}{1-i})] \quad [2\pi]$$

$$\equiv \text{Arg}[(1-i).(z - \frac{1+i}{2})] \quad [2\pi]$$

voir 1) a))

$$\equiv \text{Arg}(1-i) + \text{Arg}(z - z_B) \quad [2\pi]$$

$$\text{Arg}(z') \equiv -\frac{\pi}{4} + \left(\vec{i}, \overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$$

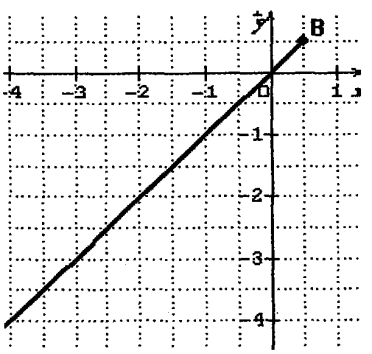
b) z' est un réel négatif donc Arg(z') ≡ π [2π]

ce qui donne $\left(\vec{i}, \overrightarrow{BM}\right) - \frac{\pi}{4} \equiv \pi[2\pi]$

D'où $\left(\vec{i}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \frac{5\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

L'ensemble des points M noté F est la demi droite [Bt) tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{Bt}\right) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Figure : Remarque :on a pour z = 0 ; z' = – 1 donc l'ensemble F est la demi droite [BO)



● a)

- $M \neq A$

On a : $\frac{z'-z}{z_A - z} = \frac{(1-i)z - 1 - z}{i - z} =$

$\frac{z - iz - 1 - z}{i - z}$

$$= \frac{-1-iz}{i-z} = \frac{i(i-z)}{i-z} = i$$

(imaginaire)

Donc : $\frac{aff(\overrightarrow{MM'})}{aff(\overrightarrow{MA})}$ est un imaginaire pur par suite on aura $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{MA}$ ce qui donne que le triangle AMM' est rectangle en M

- $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \text{Arg}(\frac{z'-i}{z-i})[2\pi]$

Or $\frac{z'-i}{z-i} = \frac{(1-i)z - 1 - i}{z-i} = \frac{z - i - iz - 1}{z-i}$

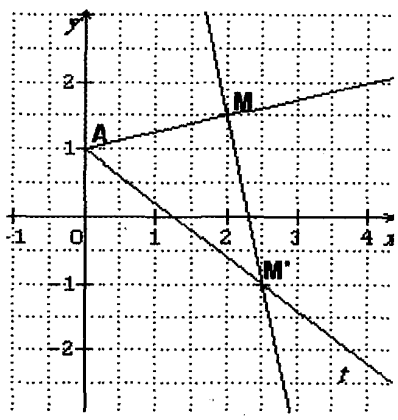
$$= \frac{z - i - i(z-i)}{z-i} = \frac{(z-i).(1-i)}{z-i} = 1 - i$$

Donc $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}) \equiv \text{Arg}(1-i)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

b) On trace la demi droite [At) tel que :

$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{At}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$,la perpendiculaire en M à la la droite (AM) coupe [At) en M'



Exercice n° 18 $z_A = i$; $z_B = 2$ $z' = \frac{z-i}{iz-2i}$

● a) $|z'| = \left|\frac{z-i}{iz-2i}\right| = \left|\frac{z-i}{i(z-2)}\right|$

$= \frac{|z-i|}{|i||z-2|} = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ car $|i| = 1$

$= \frac{AM}{BM}$

b) lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB] alors $\frac{AM}{BM} = 1$ d'où $|z'| = 1$ ce qui donne OM' = 1 par suite **M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1**

● **$z \neq i$ et $z \neq 2$**

a) On a : $\text{Arg}(z') \equiv \text{Arg}\left(\frac{z-i}{iz-2i}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}\left(\frac{z-i}{i(z-2)}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}\left(\frac{1}{i}.\frac{z-i}{z-2}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}\left(\frac{1}{i}\right) + \text{Arg}\left(\frac{z-i}{z-2}\right)\ [2\pi]$

Donc $\text{Arg}(z') \equiv -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z-i}{z-2}\right)\ [2\pi]$

$\text{Arg}(z'-z_O) \equiv -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)\ [2\pi]$

D'où :

$\left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right) - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) $M \in (AB) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d'où $\left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{OM'}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : **Le point M' appartient à la droite des ordonnées**

Exercice n° 19 $M \in \zeta(O,1)$, aff (M) = t

● on a : $|t| = OM = 1$, donc $t = e^{i\alpha}$

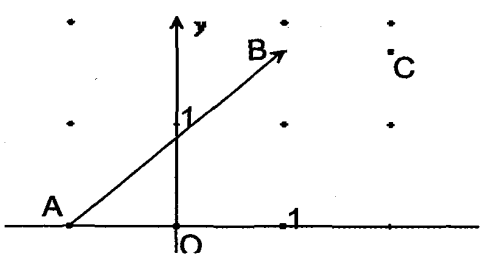
$u = t^3 = e^{i3\alpha} = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$

$v = 2t = 2(\cos\alpha + i \sin\alpha)$

● a) pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$z_A = -1$, $z_B = 1 + i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$

$z_C = v - u = z_B - z_A$ donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$



b) O, A et B sont alignés ssi : $\frac{aff(\overrightarrow{OA})}{aff(\overrightarrow{OB})}$ réel

Donc $\frac{z_A}{z_B} = \frac{u}{v} = \frac{t^3}{2t} = \frac{t^2}{2}$ est réel

Or $\frac{t^2}{2} = \frac{e^{2i\alpha}}{2}$ est réel ssi $2\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, or $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Donc pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ les points O , A et B sont alignés

Conclusion: O, A et B sont alignés pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$

● $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

a)

aff $(\overrightarrow{OC})$ = z_C = w et aff $(\overrightarrow{AB})$ = v − u = w

Donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ par suite OABC est un parallélogramme

b) pour que OABC soit un rectangle il suffit que (OA) ⊥ (OC) donc : $\frac{aff(\overrightarrow{OC})}{aff(\overrightarrow{OA})}$ imaginaire

$\Leftrightarrow \frac{2t - t^3}{t^3} \in iIR^* \Leftrightarrow (\frac{2}{t^2} - 1) \in iIR^*$

$\Leftrightarrow 2e^{-2i\alpha} - 1 \in iIR^*$

$\Leftrightarrow (2\cos 2\alpha - 1 - 2i \sin 2\alpha) \in iIR^*$

$\Leftrightarrow 2\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Comme $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on aura $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$